

MA-2113—Segundo Parcial—

1. Sea C el círculo $|z| = R$ recorrido en sentido antihorario. Sea

$$g(z) = \int_C \frac{w^3 + 2w}{(w-z)^3} dw.$$

Demuestre que $g(z) = 6\pi iz$ si $|z| < R$ y $g(z) = 0$ si $|z| > R$. (12 pts.)

2. Sea $f(z)$ analítica en un entorno de $z = 0$. Suponga además que f satisface la siguiente ecuación diferencial

$$f''(z) - 2z f'(z) - 2f(z) = 0,$$
$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0.$$

Considere la serie de Taylor de f alrededor de cero y demuestre que $f(z)$ es entera. (13 p.)

3. Calcule

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 - \sin(\theta)}.$$

(12 pts.)

4. Calcule

$$\oint_{|z|=4} \frac{e^z}{(z^2 + \pi^2)^2} dz.$$

(13 pts.)